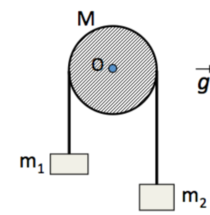
Master MEEF – Université Paris Diderot – Étienne Parizot

Exercices de Mécanique – 2

• Exercice 1 : Une poulie simple



Une poulie cylindrique de masse M et de rayon R est libre de tourner sans frottement autour d'un axe horizontal fixe, passant par son centre O. On note I le moment d'inertie de la poulie par rapport à cet axe. Deux corps de masses respectives m_1 et m_2 sont suspendues de part et d'autre de cette poulie, par un fil inextensible de masse négligeable. Le contact entre le fil et la poulie est tel que le fil ne glisse pas sur le périmètre extérieur de la poulie. Les corps sont initialement au repos.

1) Déterminer l'accélération $\vec{a}_1$ de la masse m_1 et les forces appliquées sur la poulie.

2) Retrouver l'expression de $\vec{a}_1$ en raisonnant sur l'énergie.

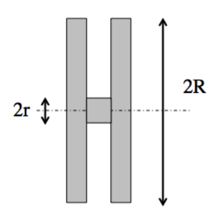
3) Qu'obtient-on dans le cas où $m_1 = m_2$?

4) Même question si $M \ll m_1$ et $M \ll m_2$.

5) Que vaut l'accélération ci-dessus si $m_2 = 2m_1$, dans le cas où M est négligeable, puis dans le cas où $M = m_2$ avec une poulie assimilée à un disque homogène.

• Exercice 2 : Un yoyo

On considère un yoyo de masse M, formé de deux disques homogènes identiques de rayon R, reliés par un cylindre très court, de masse négligeable et de rayon r, autour duquel s'enroule un fil inextensible, très fil et de masse négligeable, fixé à un doigt immobile.



1) Quelle simplification résulte de l'hypothèse que le cylindre central est très court ?

2) Le yoyo étant lâché sans vitesse initiale, déterminer l'accélération de son centre de masse, G, ainsi que la tension du fil, $\vec{T}$.

3) Retrouver l'accélération en raisonnant sur l'énergie.

4) Déterminer le mouvement du yoyo en bout de course (fil entièrement déroulé).

• Exercice 3 : Cylindre en mouvement sur un plan incliné

On considère un cylindre de rayon R et de masse M. On note Δ son axe.

1) Calculer le moment d'inertie, I_Δ, de ce cylindre par rapport à Δ, dans les trois cas suivants :

a) le cylindre est plein et homogène ;

b) le cylindre est creux et homogène (sa masse est répartie sur la surface externe) ;

c) le cylindre est plein, avec une masse volumique variant linéairement en fonction de la distance à l'axe, r, avec $\rho = 0$ en $r = 0$, et $\rho = \rho_0$ en $r = R$.

2) Ce cylindre est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, le contact s'établissant le long d'un segment de droite sur le bord externe du cylindre avec un coefficient de frottement solide noté η. Il est initialement lâché sans vitesse initiale, son axe étant horizontal et perpendiculaire à la ligne de plus grande pente du plan incliné. Décrire précisément son mouvement ultérieur, qualitativement et quantitativement.

NB : On pourra introduire toutes les grandeurs et notations jugées utiles. Il suffira de les définir et de les caractériser de manière explicite. Plusieurs cas pourront être distingués si nécessaire, en fonction des valeurs numériques des grandeurs physiques pertinentes.

• Exercice 4 : Machine d'Atwood sur un plan incliné

Deux corps solides de masse m_1 et m_2, reliés par un fil inextensible de masse négligeable, sont disposés comme sur la Fig. 1, dans un référentiel supposé galiléen.

Le fil entraîne sans glisser une poulie de centre C, fixe dans ce référentiel, d'axe Δ, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, représenté sur la figure. On note I_Δ le moment d'inertie de la poulie autour de son axe, et R son rayon. Sa rotation est repérée par l'angle θ, orienté positivement dans le sens horaire, en conformité avec l'orientation de l'axe (voir Fig. 1). La rotation se fait sans aucun frottement.

Le corps de masse m_2 repose sur un support incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On néglige tout frottement entre le corps et le support.

La position du corps de masse m_1 est repérée par sa coordonnée z_1 le long de l'axe vertical, orienté vers le haut. La position du corps de masse m_2 est repérée par sa coordonnée x_2 le long de l'axe des x, parallèle au plan incliné, orienté vers le bas, comme indiqué sur la Fig. 1.

Le champ de pesanteur est supposé uniforme, d'accélération $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

1) On abandonne le système sans mouvement initial. Quelle relation doivent vérifier les grandeurs mentionnées ci-dessus pour que les masses et la poulie restent immobiles ? À quelle condition le corps de masse m_1 se déplacera-t-il vers le haut ?

On suppose dorénavant que cette condition est vérifiée, et on s'intéresse au mouvement vertical de ce corps. On note T_1 la norme de la tension $\vec{T_1}$ exercée par le fil sur le corps 1, qui est aussi la norme de la force exercée sur la poulie par le fil vertical. On note de même T_2 la norme de la tension $\vec{T_2}$ exercée par le fil sur le corps 2, qui est aussi le module de la force exercée sur la poulie par le fil incliné. On a donc $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$, mais *a priori* $T_1 \neq T_2$.

2) Exprimer en fonction de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ le moment cinétique, $\vec{\sigma}_C$, de la poulie par rapport à son centre, puis sa projection, σ_Δ, sur l'axe Δ.

3) Appliquer le théorème du moment cinétique à la poulie, et en déduire une équation différentielle portant sur l'angle θ, faisant intervenir I_Δ, T_1 et T_2 et éventuellement d'autres données du problème.

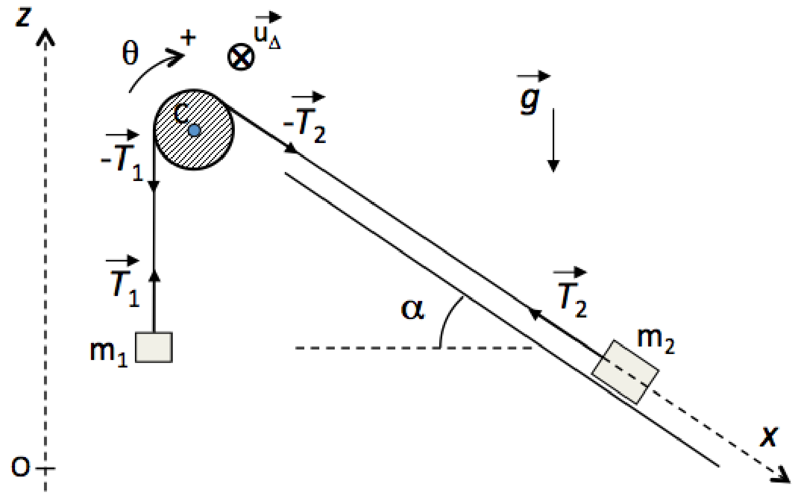


FIG. 1 – Schéma du dispositif comprenant une poulie, deux solides et un plan incliné.

4) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au corps de masse m_1, et en déduire une équation différentielle portant sur la coordonnée z_1.

5) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au corps de masse m_2, et en déduire une équation différentielle portant sur la coordonnée x_2.

6) Quelle(s) relation(s) relie(nt) la vitesse du corps 1, $\dot{z}_1$, la vitesse du corps 2, $\dot{x}_2$, et la vitesse angulaire de la poulie, $\omega = \dot{\theta}$?

7) À partir des questions précédentes, déterminer l'accélération du corps de masse m_1, c'est-à-dire $\ddot{z}_1$. On l'écrira sous la forme $\ddot{z}_1 = k \times g$, et on exprimera k en fonction de m_1, m_2, α, I_Δ et R.

8) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système est abandonné à lui-même à partir de l'état initial où la masse m_1 est maintenue au repos sur le sol : $z_1 = 0$, et $\dot{z}_1 = 0$. Déterminer la vitesse de ce corps lorsqu'il atteint l'altitude $z_1 = h$.

9) Que vaut alors l'énergie cinétique totale du système, composé des deux corps 1 et 2 ainsi que de la poulie (on rappellera l'expression de l'énergie cinétique de rotation de la poulie en fonction de sa vitesse angulaire) ?

10) Ce résultat est-il conforme à ce qui pouvait être attendu ? Commenter.

• Exercice 5 : Tige horizontale sur deux rouleaux en rotation contraire

On considère le dispositif représenté sur la Fig. 2, dans lequel une tige homogène de masse totale M est posée horizontalement sur deux rouleaux cylindriques identiques, orientés perpendiculairement à la figure, et dont les centres sont séparés par une distance $2L$. On note A et B les points de contact entre la tige et les rouleaux, et on définit l'axe horizontal Ox comme indiqué sur la figure : l'origine O est située à égale distance des centres des rouleaux, et les abscisses des points A et B sont donc, respectivement $x_\mathrm{A} = -L$ et $x_\mathrm{B} = +L$.

La position du centre de masse, G, de la tige est repérée par son abscisse x. La situation est donc totalement symétrique lorsque G se trouve au dessus du point O, c'est-à-dire pour $x = 0$.

La dispositif est placé dans un champ de pesanteur vertical uniforme, caractérisé par l'accélération

g, et le référentiel d'étude est supposé galiléen.

On note μ le coefficient de frottement dynamique entre la tige et les rouleaux.

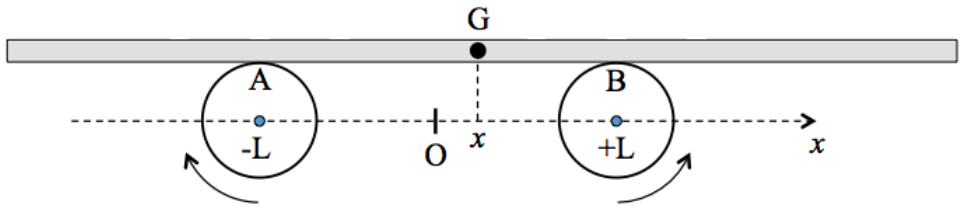


FIG. 2 – Tige homogène posée horizontalement sur deux rouleaux cylindriques.

A] On suppose dans un premier temps que les rouleaux ne tournent pas autour de leur axe, et que la tige est immobile.

1) Représenter sur un schéma les forces auxquelles la tige est soumise, en précisant leur point d'application, et rappeler les conditions générales assurant l'équilibre d'un solide.

2) Déterminer entièrement les forces s'appliquant sur la tige (direction, sens et intensité), en fonction de la position x du centre de masse.

3) Indiquer, en le justifiant, pour quelles valeurs de x un tel équilibre est possible.

B] Par un dispositif extérieur, on met à présent les rouleaux en mouvement de rotation rapide autour de leur axe, de sorte qu'ils glissent tous deux sous la tige. On choisit un mouvement de rotation contraire, comme indiqué sur la Fig. 2 : le rouleau de gauche tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, le rouleau de droite dans le sens inverse.

4) Déterminer à nouveau toutes les forces s'appliquant sur la tige (direction, sens et intensité), en fonction de la position x du centre de masse.

5) Déterminer l'équation du mouvement de la tige.

6) Montrer que la tige va osciller autour d'une position que l'on précisera, et donner l'expression de la période des oscillations.

7) Donner la valeur numérique de la période des oscillations, dans le cas où $\mu = 0.3$, $L =$ 50 cm et $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

C] On réalise à présent la même montage, mais en faisant tourner chacun des rouleaux dans l'autre sens : le rouleau de gauche dans le sens trigonométrique, et le rouleau de droite dans le sens des aiguilles d'une montre.

8) Déterminer la nouvelle équation du mouvement de la tige.

9) Résoudre cette équation en supposant que la tige est lâchée sur les rouleaux à l'instant $t = 0$ à la position $x = x_0 > 0$, sans vitesse initiale.

10) Jusqu'à quelle valeur de $x = x_\mathrm{c}$ la solution précédente est-elle valable ? À quel instant, t_c, la position correspondante est-elle atteinte ?

11) Calculer numériquement t_c pour $x_0 = 3$ cm, puis pour $x_0 = 3$ mm.

12) Décrire qualitativement ce qui se passera ensuite.